

8. EPÄLINEAARINEN AKUSTIIKKA

8.1 Linstedt – Poincaré - kehitelmä harmoniselle oskillaattorille

Tarkastellaan ensin epälineaarisuuksia malli systeemin avulla. Olkoon meillä harmoninen oskillaattori, jolla pieni kvadraattinen epälineaarisuus

$$m\ddot{x} + kx + \varepsilon x^2 = 0$$

Etsitään tälle häiriökehitelmää pienen parametrin ε :n potensseina

$$x(\omega t) = x_{(0)}(\omega t) + \varepsilon x_{(1)}(\omega t) + \varepsilon^2 x_{(2)}(\omega t) + \dots$$

missä ominaistajuuks ω on myös häiriöparametrin funktio

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

Tällöin derivaatista tulee

$$\frac{d^2}{dt^2} x(\omega t) = [x_{(0)}''(\omega t) + \varepsilon x_{(1)}''(\omega t) + \varepsilon^2 x_{(2)}''(\omega t) + \dots] [\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots]^2$$

missä derivaatat oikealla otetaan parametrin $\tau = \omega t$ suhteen ja neliöstä

$$x^2 = x_{(0)}^2 + \varepsilon [2x_{(1)}x_{(0)}] + \varepsilon^2 [x_{(1)}^2 + x_{(1)}x_{(2)}] + \dots$$

Sijoitetaan tämä differentiaaliyhtälöön

$$m[x_{(0)}'' + \varepsilon x_{(1)}'' + \varepsilon^2 x_{(2)}'' + \dots] [\omega_0^2 + \varepsilon [2\omega_0\omega_1] + \varepsilon^2 [\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2] + \dots] + k[x_{(0)} + \varepsilon x_{(1)} + \varepsilon^2 x_{(2)} + \dots] + \varepsilon x_{(0)}^2 + \varepsilon^2 [2x_{(1)}x_{(0)}] + \varepsilon^3 [x_{(1)}^2 + x_{(1)}x_{(2)}] = 0$$

Tämän voi olla totta jos se on nyt totta jokaiselle ε :n potenssille erikseen

$$\varepsilon^0 : m\omega_0^2 x_{(0)}'' + kx_{(0)} = 0$$

$$\varepsilon^1 : m\omega_0^2 x_{(1)}'' + kx_{(1)} = -x_{(0)}^2 - 2m\omega_1\omega_0 x_{(0)}''$$

$$\varepsilon^2 : m\omega_0^2 x_{(2)}'' + kx_{(2)} = -2x_{(1)}x_{(0)} - (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)mx_{(0)}'' - 2m\omega_1\omega_0 x_{(1)}''$$

....

Vasemmalle olemme siirtäneet aina kunkin kertaluvun i ratkaistavan häiriön $x_{(i)}$ sisältävät termit ja oikealle olemme siirtäneet, ne jotka riippuvat alemman ε :n potenssin ratkaisusta $x_{(j)}$, $j < i$. Vasemmalla puolella on aina lineaarisen harmonisen oskillaattorin yhtälö ja oikealla oskillaattoria ajava voima. Siis ratkaistuamme nollannen kertaluvun häiriön, saamme ajavan voiman ensimmäisen kertaluvun yhtälölle ja niin edelleen.

Nollas kertaluku:

$$m\omega_0^2 x_{(0)}'' + kx_{(0)} = 0$$

Tämän yleinen ratkaisu on vakioden A ja B avulla

$$x_{(0)}(\tau) = A \exp[i\tau] + B \exp[-i\tau]$$

$$\text{mikäli } (-m\omega_0^2 + k) = 0$$

Tämä määrää siis alimman kertaluvun taajuuden: $\omega_0^2 = k/m$.

Ensimmäinen kertaluku:

$$m\omega_0^2 x_{(1)}'' + kx_{(1)} = -x_{(0)}^2 - 2m\omega_1\omega_0 x_{(0)}'' \Leftrightarrow$$

$$x_{(1)}'' + x_{(1)} = -\frac{2AB}{k} - \frac{A^2 \exp[2i\tau]}{k} - \frac{B^2 \exp[-2i\tau]}{k} + 2\frac{\omega_1}{\omega_0} (A \exp[i\tau] + B \exp[-i\tau])$$

missä olemme käyttäneet nollannen kertaluvun ratkaisua. Alemman kertaluvun termit määräävät siis ajavan voiman seuraavalle termille. Kullekin ajavalle taajuudelle on oma ratkaisunsa ja yleinen ratkaisu on muotoa

$$x_{(1)}(\tau) = C + D \exp[2i\tau] + E \exp[-2i\tau] + F\tau \exp[i\tau] + G\tau \exp[-i\tau]$$

Jälkimmäiset kaksi ovat ns. sekulaarisia termejä, joiden suuruus kasvaa ajan mukana. Se johtuu siitä, että ajava voima on täsmälleen oskillaattorin ominaistaajuudella. Jos etsimme periodista ratkaisua, värähtelyä, täytyy olla $F = 0$, $G = 0$. Tämä onnistuu, mikäli ensimmäinen taajuuden häiriökerroin asetetaan nolaksi: $\omega_1 = 0$. Sijoitetaan loppuyrite yhtälöön, jolloin

$$C - 3D \exp[2i\tau] - 3E \exp[-2i\tau] = -\frac{2AB}{k} - \frac{A^2 \exp[2i\tau]}{k} - \frac{B^2 \exp[-2i\tau]}{k}$$

Tämä on totta mikäli

$$C = -\frac{2AB}{k}; \quad -3D = -\frac{A^2}{k}; \quad -3E = -\frac{B^2}{k}$$

joten

$$x_{(1)}(\tau) = -\frac{2AB}{k} + \frac{A^2 \exp[2i\tau]}{3k} + \frac{B^2 \exp[-2i\tau]}{3k}$$

Toinen kertaluku:

Viimein siirtykäämme toiseen kertalukuun

$$x_{(2)}'' + x_{(2)} = -\frac{2x_{(1)}x_{(0)}}{k} - \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + \frac{2\omega_2}{\omega_0}\right)x_{(0)}'' - 2\frac{\omega_1}{\omega_0}x_{(1)}'' = -\frac{2x_{(1)}x_{(0)}}{k} - \frac{2\omega_2}{\omega_0}x_{(0)}'' =$$

$$-\frac{2}{k} \left[-\frac{2AB}{k} + \frac{A^2 \exp[2i\tau]}{3k} + \frac{B^2 \exp[-2i\tau]}{3k} \right] [A \exp[i\tau] + B \exp[-i\tau]] +$$

$$\frac{2\omega_2}{\omega_0} [A \exp[i\tau] + B \exp[-i\tau]]$$

Taasen edellisten kertalukujen ratkaisut ajavat toisen kertaluvun harmonisen oskillaattorin. Tässä yhtälössä on taas mukana voimia, jotka ajavat perustaajuudella ja johtaisivat sekulaarisiin termeihin. Jaotellaan ajavat voimat taajuuksien mukaan

$$x_{(2)}'' + x_{(2)} = A \left[\frac{2\omega_2}{\omega_0} + \frac{4AB}{k^2} - \frac{2BA}{3k^2} \right] \exp[i\tau] +$$

$$B \left[\frac{2\omega_2}{\omega_0} + \frac{4AB}{k^2} - \frac{2BA}{3k^2} \right] \exp[-i\tau] - \left[\frac{2A^3}{3k^2} \right] \exp[3i\tau] - \left[\frac{2B^3}{3k^2} \right] \exp[-3i\tau]$$

Sekulaariset termit häviävät jos valitsemme ω_2 :n siten että termien $\exp[\pm i\tau]$ kertoimet häviävät:

$$\omega_2 = -\omega_0 \frac{5AB}{3k}$$

Tätä voisimme jatkaa loputtomiin kuhunkin kertalukuun. Toiseen kertalukuun mennessä olemme saaneet ominaistaajuudeksi

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left[1 - \varepsilon^2 \frac{5AB}{3k^2} \right]$$

Epälineaarisuus on siis tehnyt ominaistaajuudesta amplitudin (AB) funktion!

Periodisessa liikkeessä esiintyvät myös taajuuden monikerrat.

$$x(t) \approx -\frac{\varepsilon 2AB}{k} + A \exp[i\omega t] + B \exp[-i\omega t] + \varepsilon \frac{A^2 \exp[2i\omega t]}{3k} + \varepsilon \frac{B^2 \exp[-2i\omega t]}{3k}$$

Huomaa, miten epälineaarisuus myös siirtää tasapainokohtaa.

Usein siis oletetaankin, edelliseen nojautuen, että ratkaisu on periodinen perustaajuudella ja joukolla ylä-ääniä, perusperiodin monikertoja:

$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^N c_n \exp[in\omega t]$$

Tämä yrite johtaa metodiin, jota kutsutaan harmoniseksi balanssiksi h(harmonic balance) ja sitä käytetään usein ratkaisemaan epälineaarisia systeemejä numeerisesti.

Jos yrite sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön

$$m\ddot{x} + kx + \varepsilon x^2 = 0$$

ja asetellaan nollassi kukin taajuuskomponentti erikseen aina valittuun kertalukuun N asti:

$$\sum_{n=-N}^N -\omega^2 n^2 c_n \exp[in\omega t] + k \sum_{n=-N}^N c_n \exp[in\omega t] + \varepsilon \sum_{n,m=-N}^N c_n c_m \exp[i(n+m)\omega t] = 0$$

Nollas kertaluku:

$$kc_0 + 2\varepsilon \sum_{n=-N}^N c_n c_{-n} = 0$$

Ensimmäinen kertaluku:

$$(-\omega^2 + k)c_1 + 2\varepsilon \sum_{n=-N}^N c_n c_{1-n} = 0$$

$$(-\omega^2 + k)c_{-1} + 2\varepsilon \sum_{n=-N}^N c_{n-1} c_{-n} = 0$$

Toinen kertaluku:

$$(-4\omega^2 + k)c_2 + 2\varepsilon \sum_{n=-N}^N c_n c_{2-n} = 0$$

$$(-4\omega^2 + k)c_{-2} + 2\varepsilon \sum_{n=-N}^N c_{n-2} c_{-n} = 0$$

Tottahan toki nämä ovat epälineaarisia yhtälöitä, koska kyseessä on epälineaarinen ongelma. Näiden ratkaisu vaatiikin aika paljon tapauskohtaista vääntöä.

Tämä esimerkki sisältää epälineaarisen systeemin yleiset ominaisuudet: ominaistajuuden riippuvuuden amplitudista ja ylä-äänien synnyn. Seuraavaksi tarkastellaan äänen epälineaarisuutta ilmassa.

8.2 Äänen epälineaarisuus

Äänen etenemistä kuvaa jo tutuksi tullut yhtälöryhmä.

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \frac{4\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Tarkastellaan 1-dimensiosta etenemistä. Tämä on järkevää yleisessäkin tapauksessa, koska voidaan ajatella, ainakin korkeimmilla taajuuksilla, että ääni etenee säteen tavoin oleellisesti yksiulotteisena. Yksiulotteiselle, x-suuntaan etenevälle systeemille saadaan edellisestä

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Jätetään nyt viskositeetti huomiotta, jolloin toinen derivaatta nopeuden suhteen häviää. Lisäksi otetaan adiabaattisen laajenemisen tilanyhtälön

$$\left(\frac{p}{p_0} \right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

Kehitetään tämä Taylorin sarjaksi

$$p = p_0 + \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \frac{p_0 \gamma}{\rho_0^2} (\rho - \rho_0)^2 + \dots$$

saadaan

$$\frac{p - p_0}{p_0} \approx \gamma \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{1}{2} \gamma(\gamma - 1) \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \dots$$

Skaalataan muuttujat dimensiottomiksi.

$$t \rightarrow \omega t$$

$$x \rightarrow kx$$

$$v_x \rightarrow v_x / U$$

ja poistetaan nollannen kertaluvun efektit

$$p \rightarrow p_0 + p$$

$$\rho \rightarrow \rho_0 + \delta$$

$$\rho_0 \left(1 + \frac{\delta}{\rho_0} \right) \left[U \omega \frac{\partial(v_x/U)}{\partial(\omega t)} + U^2 k(v_x/U) \frac{\partial(v_x/U)}{\partial(kx)} \right] = -k \frac{\partial p}{\partial(kx)}$$

$$\rho_0 U k \left(1 + \frac{\delta}{\rho_0} \right) \frac{\partial(v_x/U)}{\partial(kx)} + U k \rho_0 (v_x/U) \frac{\partial(\rho/\rho_0)}{\partial kx} + \rho_0 \omega \frac{\partial(\rho/\rho_0)}{\partial(\omega t)} = 0$$

Yritetään vielä skaalata kaikki suureet samaan suuruusluokkaan. Jos nopeuden skaala on U , niin systeemin Machin luku on $M = U/c$. Painevaihteluiden suuruusluokka on tällöin karakteristisen impedanssin mukaan

$$\rho_0 c \propto \frac{p}{U} \Leftrightarrow p \propto \rho_0 c U$$

ja tiheydenvaihteluiden suuruusluokka saadaan äänennopeudesta

$$c^2 = \gamma p_0$$

$$\delta = \frac{1}{c^2} p \propto \frac{\rho_0 U}{c} = \rho_0 M$$

Kun nämä skaalat ujutetaan vielä yhtälöihin saadaan

$$\rho_0 \left(1 + M \left(\frac{\delta}{\rho_0 M} \right) \right) \left[U \omega \frac{\partial(v_x/U)}{\partial(\omega t)} + U^2 k(v_x/U) \frac{\partial(v_x/U)}{\partial(kx)} \right] = -k \rho_0 c U \frac{\partial(p/(\rho_0 c U))}{\partial(kx)}$$

$$\rho_0 U k \left(1 + M \left(\frac{\delta}{\rho_0 M} \right) \right) \frac{\partial(v_x/U)}{\partial(kx)} + U k \rho_0 (v_x/U) M \frac{\partial(\rho/(M \rho_0))}{\partial kx} + \rho_0 \omega M \frac{\partial(\rho/(M \rho_0))}{\partial(\omega t)} = 0$$

Koska $\omega = ck$ näitä voi sieventää muotoon

$$\left(1 + M \left(\frac{\delta}{\rho_0 M} \right) \right) \left[\frac{\partial(v_x/U)}{\partial(\omega t)} + M (v_x/U) \frac{\partial(v_x/U)}{\partial(kx)} \right] = - \frac{\partial(p/(\rho_0 c U))}{\partial(kx)}$$

$$\left(1 + M \left(\frac{\delta}{\rho_0 M} \right) \right) \frac{\partial(v_x/U)}{\partial(kx)} + (v_x/U) M \frac{\partial(\rho/(M \rho_0))}{\partial kx} + \frac{\partial(\rho/(M \rho_0))}{\partial(\omega t)} = 0$$

Vihdoin annetaan nämä yhtälöt skaalatussa muodossa skaalatuin suurein

$$(1 + M\rho) \left[\frac{\partial v}{\partial t} + Mv \frac{\partial v}{\partial x} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(1 + M\rho) \frac{\partial v}{\partial x} + vM \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Tilanyhtälö on skaalatuissa muuttujissa

$$\dots (1 + M\rho)^\gamma = \left(1 + \frac{\rho_0 cU}{p_0} (p / (\rho_0 cU)) \right) = (1 + \gamma M\rho)$$

Nyt, ajatellaan Machin luku pieneksi ja esitetään ratkaisu sen potensseina

$$v = v_{(0)} + Mv_{(1)} + M^2 v_{(2)} + \dots$$

$$p = p_{(0)} + Mp_{(1)} + M^2 p_{(2)} + \dots$$

$$\rho = \rho_{(0)} + M\rho_{(1)} + M^2 \rho_{(2)} + \dots$$

ja asetetaan joka Machin luvun kertaluku erikseen nolaksi. Alimmassa kertaluvussa

$$\frac{\partial v_{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p_{(0)}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v_{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{(0)}}{\partial t} = 0$$

$$1 + \gamma M\rho + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} M^2 \rho \approx (1 + \gamma M\rho) \Rightarrow \rho_{(0)} = p_{(0)}$$

Tämä on normaali akustinen raja, joka antaa d'Alembertin ratkaisun

$$v_{(0)} = p_{(0)} = \rho_{(0)} = f(x-t)$$

kaikille muuttujille.

Seuraavassa kertaluvussa poimitaan näistä termit, jotka ovat lineaarisia M :n suhteen.

Esimerkiksi aloitetaan yhtälöstä

$$(1 + M(\rho_{(0)} + M\rho_{(1)})) \left[\frac{\partial(v_{(0)} + Mv_{(1)})}{\partial t} + M(v_{(0)} + Mv_{(1)}) \frac{\partial(v_{(0)} + Mv_{(1)})}{\partial x} \right] =$$

$$- \frac{\partial(p_{(0)} + Mp_{(1)})}{\partial x}.$$

ja poistetaan helposti nähtävät Machin luvussa toista kertalukua olevat termit

$$(1 + M\rho_{(0)}) \left[\frac{\partial(v_{(0)} + Mv_{(1)})}{\partial t} + Mv_{(0)} \frac{\partial(v_{(0)} + Mv_{(1)})}{\partial x} \right] = - \frac{\partial(p_{(0)} + Mp_{(1)})}{\partial x}.$$

Sijoitetaan nollannen kertaluvun ratkaisu yhtälöön

$$(1 + Mf) \left[\frac{\partial(f + Mv_{(1)})}{\partial t} + Mf \frac{\partial(f + Mv_{(1)})}{\partial x} \right] = - \frac{\partial(f + Mp_{(1)})}{\partial x}.$$

Poistetaan lisää toisen kertaluvun termejä ja nollas kertaluku

$$M \frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} + Mf \frac{\partial f}{\partial t} + Mf \frac{\partial f}{\partial x} = -M \frac{\partial p_{(1)}}{\partial x}.$$

Saadaan

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial p_{(1)}}{\partial x} = f \frac{\partial f}{\partial t} - f \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Samoin jatkuvuusyhtälölle

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{(1)}}{\partial t} = -2f \frac{\partial f}{\partial x} = -(f^2)'$$

ja tilanyhtälölle

$$\rho_{(1)} + \frac{(\gamma-1)}{2} (f^2) = p_{(1)}$$

Yhdistellään yhtälöitä, korvataan tiheys paineella jatkuvuusyhtälössä tilanyhtälön avulla.

Saadaan siis yhtälöpari

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial p_{(1)}}{\partial t} = - \left[1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \right] (f^2)'$$

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial p_{(1)}}{\partial x} = 0$$

Sitten tehdään niin kuin tavallisesti, derivoidaan alempi paikan suhteen ylempi ajan suhteen ja vähennetään ne toisistaan

$$\frac{\partial^2 v_{(1)}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 p_{(1)}}{\partial t^2} + \left[1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \right] (f^2)'' - \frac{\partial^2 v_{(1)}}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 p_{(1)}}{\partial x^2} = 0$$

eli

$$\frac{\partial^2 p_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p_{(1)}}{\partial t^2} = \frac{(\gamma+1)}{2} (f^2)''$$

Siis ensimmäisen kertaluvun paineen yhtälö on aivan tavallisen aaltoyhtälön näköinen, mutta siinä on nollannen kertaluvun ratkaisun neliö on lähdeterminä.

Erikoisratkaisuksi voi nähdä muodon

$$p_{(1)} = \frac{\gamma+1}{2} xf(t-x)f'(t-x)$$

Siis toiseen kertalukuun asti

$$p = p_{(0)} + Mp_{(1)} = f(t-x) + M \frac{\gamma+1}{2} xf(t-x)f'(t-x) + O(M^2)$$

8.2.1 Parametrikaiutin

Jos nollannen kertaluvun kenttä f koostuu kahdesta taajuuskomponentista

$$f = \exp(i\omega_1 t) + \exp(-i\omega_2 t),$$

tämän neliö sisältää termit

$$f^2 = \exp(i2\omega_1 t) + \exp(-i2\omega_2 t) + 2\exp(i(\omega_1 - \omega_2)t)$$

Ensimmäisen kertaluvun kentän lähdeterminä on muun muassa taajuudella

$|\omega_1 - \omega_2|$ kuuluva komponentti. Täten hyvin korkeataajuisesta äänilähteestä voidaan saada rakennettua epälineaarinen kenttä, joka on matalampitaajuisen äänen lähde. Tätä kutsutaan parametrikaiuttimeksi, ja sitä käytetään paljon vedenalaisessa ultrasoniikassa. Ilmaankin on väsäilty prototyyppisiä, mutta vaadittavat ultraäänilähteen tehot ja kiteiden vaihevasteen epämääräisyys on vaikeuttanut konseptin soveltamista

Häiriöteorian ratkaisun alkupäätä saatiin kootuksi

$$p = f(t-x) + M \frac{\gamma+1}{2} xf(t-x)f'(t-x) + O(M^2)$$

Pitkän ajan kuluessa, aaltopaketin edetessä kauas termi Mx kasvaa välttämättä suureksi. Siten oli alkuaalto kuinka heikko tahansa, ajan mittaan toisen kertaluvun termi kasvaa ja ohittaa alkuperäisen. Siten akustiikka on aina epälineaarista, kunhan jaksaa odottaa tarpeeksi kauan ja kauas.

8.2.2 Karakteristikat

Lähdetään taas alkuperäisistä yhtälöistä

$$(1 + M\rho) \left[\frac{\partial v}{\partial t} + Mv \frac{\partial v}{\partial x} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(1 + M\rho) \frac{\partial v}{\partial x} + vM \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$(1 + M\rho)^\gamma = (1 + \gamma M\rho)$$

Etsitään sellaisia ratkaisuja, joissa nopeus ja tiheys ovat nopeuden yksiköittäisiä funktioita. Tällöin

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dp} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}$$

sillä olemme skaalanneet muuttujat dimensiottomiksi. Yhtälöt saadaan muotoon jossa on vain paineen ajan ja paikan osittaisderivaattoja

$$\left[(1 + M\rho) \frac{dv}{dp} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[(1 + M\rho) Mv \frac{dv}{dp} + 1 \right] \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\left[\frac{d\rho}{dp} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[(1 + M\rho) \frac{dv}{dp} + Mv \frac{d\rho}{dp} \right] \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Nyt yleisesti, dimensiollisille muuttujille pätee (nopeus c ja tiheys ρ ovat funktiota)

$$\frac{dv}{dp} = \frac{1}{\rho c}, \quad \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2}$$

Koska olemme skaalanneet muuttujat dimensiottomiksi näiden suhteet ovat

$$\frac{dv}{dp} = \frac{c_0}{(1 + M\rho)c}, \quad \frac{d\rho}{dp} = \frac{c_0^2}{c^2}$$

missä olemme merkinneet alaindeksillä piensignaalin äänennopeutta.

$$\left[\frac{c_0}{c} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{c_0}{c} Mv + 1 \right] \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\left[\frac{c_0^2}{c^2} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{c_0}{c} + \frac{c_0^2}{c^2} Mv \right] \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Tämä on yhtälöryhmä, jolla on ei-triviaaleja ratkaisuja vain jos sen determinantti on nolla, ja niinhän se onkin. Silloin osittaisdifferentiaaliyhtälöstä tulee samat

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{c}{c_0} + Mv \right] \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

8.3

Heikko shokki

Epälineaarinen yhtälö ilman skaalausta on

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [c + v] \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Tämä kuvaa aaltoa, jonka nopeus riippuu sen amplitudista. Mitä suurempi ylipaine sen isompi nopeus ja toisaalta taas alipaine amplitudi kulkee hitaammin. Tästä seuraa se, että aalto jyrkentyy kulkiessaan eteenpäin.

$$p(x, t) = f(x - (v + c)t)$$

Pienille muutoksille

$$v \approx \frac{p}{\rho_0 c_0}, \quad c \approx c_0 + \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_0 p$$

Siispä

$$c + v \approx c_0 + \beta_0 v$$

missä

$$\beta = 1 + \left(\rho c \frac{\partial c}{\partial p} \right)_0 = 1 + \frac{1}{2} \left(\rho^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 / \left(\rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \approx 1.2 \quad \text{ilmassa}$$

on epälineaarisuusparametri. Jälkimmäisessä muodossa käytimme, äänen nopeuden termodynaamista yhteyttä

$$\rho^2 \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial p} = \frac{1}{c^2}$$

Ratkaisuksi voidaan antaa nyt parametrinen esitys

$$p(x, t) = f(\phi)$$

$$x = \phi + \left(c + \beta \frac{f(\phi)}{\rho c} \right) t$$

Kokeillaan nyt siniaaltoa ratkaisuun

$$p(0, t) = A \sin[\omega t]$$

Tällöin

$$p(x, t) = A \sin[\omega \phi]$$

$$\omega(t - x/c) = \omega \phi - \sigma \sin[\omega \phi]$$

missä

$$\sigma = x / \left(\frac{\rho c^2}{\beta k A} \right)$$

Yhtälölle $\omega(t - x/c) = \omega \phi - \sigma \sin[\omega \phi]$ löytyy yksikäsitteinen ratkaisu, kunhan $\sigma < 1$. Siten tämä antaa etäisyyden, jossa shokki aalto välttämättä syntyy.

Tälle löytyy yleinenkin ratkaisu (Fubini-Ghiron)

$$p = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin[n\omega(t - x/c)], \quad \left(\sigma = \frac{x}{x'}, \quad x' = \frac{\rho_0 c_0^3}{\beta \omega P_0} \right)$$

8.3.1

Saha-aalto

$$f(\phi) = \begin{cases} \frac{A\phi}{L}, & -L < \phi < L \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Ratkaisuksi tulee

$$p(x, t) = \frac{P(t)}{L(t)} (x - ct)$$

missä

$$P(t) = \frac{A}{\sqrt{1+t/\tau_N}}, \quad L(t) = L\sqrt{1+t/\tau_N}, \quad \tau_N = \frac{L\rho c}{\beta A}$$

8.4 Vanha shokki

8.4.1 Viskositeetti

Todellisuudessa aallosta ei tule moniarvoista, vaan suuri nopeusgradientti shokkia lähestyttäessä johtaa isoon kitkaan. Kun otetaan viskositeetti termi mukaan ja käydään läpi sama harjoitus karakteristikoiden kanssa, saadaan Burgesin yhtälö

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (c_0 + \beta v) \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\nu = \frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{4}{3} \mu + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right\}$$

missä ν on kaasun diffuusiivisuus (diffusivity), μ viskositeetti, ja κ lämmönjohtavuus.

Kun shokkiutumisen jälkeen aaltoa seurataan pitkään korkeimmissa taajuuksissa viskositeetti vaikuttaa enemmän kuin matalissa, ja lopulta vain perustaajuus on jäljellä:

$$p = A \frac{\frac{4}{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} n I_n \left(\frac{\Gamma}{2} \right) e^{-n^2 \frac{\sigma}{\Gamma}} \sin(n\omega t) \right]}{I_0 \left(\frac{\Gamma}{2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n n I_n \left(\frac{\Gamma}{2} \right) e^{-n^2 \frac{\sigma}{\Gamma}} \cos(n\omega t) \right]}$$

missä on käytetty Goldbergin lukua

$$\Gamma = \frac{\beta A}{\rho_0 \omega \nu}$$

joka kertoo mikä on epälineaarisuuden suhde häviöihin.